Teoremi di conservazione e simmetrie

Nicola Rogano

Le equazioni del moto di Lagrange si scrivono nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{1}$$

Ci riproponiamo di ricavare informazioni sul comportamento dinamico del sistema senza passare dall'integrazione delle equazioni del moto; in particolare ci interessa ricavare espressioni nella forma:

$$f(q_1, ..., q_2, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) = cost \tag{2}$$

tali espressioni, che costituiscono delle equazioni differenziali del primo ordine, vengono indicate come **integrali primi del moto**. Consideriamo l'esempio di un sistema di particelle soggette soltanto a forze derivabili da potenziali dipendenti soltanto dalla posizione:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \tag{3}$$

l'ultimo termine è nullo, per cui scriviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} && (4)\\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\sum_i \frac{1}{2} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) && (5)\\
&= m_i \dot{x}_i && (6)\\
&= p_{xi} && (7)
\end{aligned}$$

l'ultimo termine rappresenta la componente lungo x del momento lineare dell'i-esima particella. Possiamo dunque generalizzare il concetto definendo il **momento generalizzato** associato alla coordinata generalizzata q_j come:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{8}$$

spesso indichiamo il momento generalizzato come **momento canonico** o **momento coniugato**.

Non sempre il momento generalizzato assume l'aspetto di un momento lineare. Consideriamo, ad esempio, la Lagrangiana di un sistema di particelle cariche in moto in presenza di un campo elettromagnetico:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_i q_i \, \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{r}_i \tag{9}$$

ovvero:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_i q_i \, \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} (A_x \, \dot{x}_i + A_y \, \dot{y}_i + A_z \, \dot{z}_i) \tag{10}$$

in tal caso, il momento generalizzato coniugato alla variabile x è dato da:

$$p_{xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x} + \frac{q_i}{c} A_x \tag{11}$$

Teorema di conservazione del momento generalizzato.
Consideriamo un caso particolare in cui la Lagrangiana di un sistema non dipende da una data coordinata q_j: in tal caso, si dice che la coordinata q_j è **ciclica** e vale la seguente relazione:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{12}$$

per cui le equazioni di Lagrange diventano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \tag{13}$$

ricordando l'espressione del momento generalizzato rispetto a q_j:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{14}$$

possiamo scrivere:

$$\frac{dp_j}{dt} = 0 \tag{15}$$

ovvero:

$$p_j = cost \tag{16}$$

Il momento generalizzato coniugato a una coordinata ciclica si conserva.

Nel seguito dimostreremo come, partendo dal teorema di conservazione del momento generalizzato per una coordinata ciclica, si possono ricavare, utilizzando i concetti di invarianza, il teorema di conservazione del momento lineare e del momento angolare.

Invarianza alla traslazione.
Consideriamo il caso in cui una coordinata generalizzata q_j sia tale che un suo incremento dq_j rappresenti una **traslazione** del sistema lungo una certa direzione. L'energia cinetica T non dipende da q_j, per cui:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \tag{17}$$

inoltre, se consideriamo il caso di un campo conservativo, il potenziale non dipende dalla grandezza $\dot{q}_j$, per cui:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{18}$$

con queste considerazioni iniziali, lavoriamo sulle equazioni del moto di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{20}$$

che, in base alle relazioni ricavate in precedenza, diventano:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \tag{21}$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{22}$$

l'espressione al primo membro rappresenta la variazione nel tempo del momento generalizzato:

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{23}$$

mentre al primo membro troviamo l'espressione della forza generalizzata:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{24}$$

riscriviamo le equazioni di Lagrange come:

$$\dot{p}_j = Q_j \tag{25}$$

In generale, la forza generalizzata Q_j si esprime come:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dq_j} \tag{26}$$

scriviamo anche:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dq_j} = \frac{dq_j\,\mathbf{n}}{dq_j} = \mathbf{n} \tag{27}$$

avendo indicato con $\mathbf{n}$ il versore della direzione lungo la quale avviene la traslazione. Quindi:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \tag{28}$$

se la coordinata interessata dalla traslazione q_j è ciclica, la Lagrangiana non dipende da q_j e quindi anche il potenziale V non dipende da q_j:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \tag{29}$$

e:

$$Q_j = 0 \tag{30}$$

quindi, le equazioni di Lagrange si riducono alla relazione:

$$\dot{p}_j = 0 \tag{31}$$

ovvero:

$$p_j = cost \tag{32}$$

Concludiamo dicendo che se una certa componente della forza risultante agente su un sistema è nulla, la corrispondente componente della quantità di moto **si conserva**. In particolare, possiamo affermare che: *se una coordinata ciclica q_j è tale che dq_j corrisponde ad una traslazione lungo una data direzione, la conservazione del momento coniugato esprime la conservazione del momento lineare.*

Invarianza alla rotazione.
In modo analogo a quanto visto nel caso della traslazione, l'energia cinetica T non dipende da q_j, per cui:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \tag{33}$$

poichè V è indipendente da $\dot{q}$, scriviamo nuovamente:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{34}$$

con queste considerazioni iniziali, lavoriamo sulle equazioni del moto di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{36}$$

che, in base alle relazioni ricavate in precedenza, diventano:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \tag{37}$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{38}$$

l'espressione al primo membro rappresenta la variazione nel tempo del momento generalizzato:

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{39}$$

mentre al primo membro troviamo l'espressione della forza generalizzata:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{40}$$

riscriviamo le equazioni di Lagrange come:

$$\dot{p}_j = Q_j \tag{41}$$

In generale, la forza generalizzata Q_j si esprime come:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dq_j} \tag{42}$$

In questo caso, tuttavia, lo spostamento che interessa la grandezza q_j è una rotazione attorno ad un asse che ha come versore n, per cui questo tipo di spostamento conduce ad una diversa formulazione della derivata di $\mathbf{r}_i$:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dq_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \tag{43}$$

e quindi:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \tag{44}$$

ovvero:

$$Q_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{N}_i \tag{45}$$

ponendo:

$$\sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{N} \tag{46}$$

dove $\mathbf{N}$ rappresenta il momemto risultante, possiamo scrivere:

$$Q_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \tag{47}$$

In modo analogo al caso precedente, possiamo scrivere:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \, \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dq_j} = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \, \mathbf{v}_i \tag{48}$$

ovvero:

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{L}_i \tag{49}$$

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \tag{50}$$

con $\mathbf{L}$ che rappresenta il momento angolare totale.

Se la coordinata di rotazione q_j è ciclica, Q_j (che rappresenta la componente del momento totale delle forze attive rispetto ad $\mathbf{n}$) si annulla e la componente di $\mathbf{L}$ rispetto ad $\mathbf{n}$ è costante.
In particolare, possiamo affermare che: *se una coordinata ciclica q_j è tale che dq_j corrisponde ad una rotazione attorno ad un certo asse, la conservazione del momento coniugato esprime la conservazione del momento angolare.*

Conclusioni.
Se una coordinata generalizzata corrispondente ad uno spostamento è ciclica significa che il sistema è invariante rispetto alla traslazione lungo la direzione data e quindi che la corrispondente componente del momento lineare si conserva.

Analogamente, il fatto che una coordinata di rotazione sia ciclica significa che il sistema è invariante rispetto ad una rotazione attorno all'asse dato e di conseguenza che il momento angolare si conserva.

Osservazione: i teoremi di conservazione del momento lineare e del momento angolare sono strettamente legati alle proprietà di simmetria del sistema.

Teorema di conservazione dell'energia totale nei sistemi conservativi.
Consideriamo un sistema conservativo, tale per cui vale la relazione:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{51}$$

con la funzione potenziale V che dipende solo dalle coordinate generalizzate e non dalle velocità:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{52}$$

e, in aggiunta, supponiamo che la funzione Lagrangiana L non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{53}$$

scriviamo la derivata della Lagrangiana:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{54}$$

ovvero:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \tag{55}$$

dalle Equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{56}$$

per cui:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \tag{57}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \tag{58}$$

possiamo scrivere l'ultima relazione come:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \tag{59}$$

e ancora:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \tag{60}$$

ciò significa che la quantità dentro le parentesi è costante; scriviamo:

$$-H = L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{61}$$

ovvero:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \tag{62}$$

e ancora:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \, p_j - L \tag{63}$$

la quantità H rappresenta un integrale del moto ed essa corrisponderà proprio all'**energia totale** del sistema.

Per sistemi conservativi, vale la relazione:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{64}$$

per cui, sostituendo nell'espressione di H:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - L \tag{65}$$

in base al **teorema di Eulero**, per una funzione omogenea di ordine n di un sistema di variabili q_i vale la relazione:

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_j} = nf \tag{66}$$

per cui:

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T \tag{67}$$

e quindi:

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V \tag{68}$$

in conclusione:

$$H = T + V \tag{69}$$

rappresenta l'**energia totale** del sistema e, con le condizioni poste all'inizio della discussione, essa **si conserva**.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Goldstein - *Classical Mechanics* - Addison Wesley.

[2] H. Goldstein - *Meccanica Classica* - Zanichelli.