Principio di Hamilton ed equazioni di Lagrange

Nicola Rogano

La configurazione istantanea di un sistema viene descritta mediante i valori delle n **coordinate generalizzzate** che rappresentano, in uno spazio n-dimensionale, un punto ben preciso. Tale spazio viene chiamato **spazio delle configurazioni**. Un punto nello spazio delle configurazioni corrisponde allo stato del sistema in un preciso istante di tempo t. Passando da un istante t_1 ad un istante t_2, la configurazione del sistema cambia.

Il **Principio di Hamilton** per sistemi conservativi (inclusi anche quelli che prevedono potenziali generalizzati) si può enunciare nel modo seguente: il moto del sistema, fra gli istanti t_1 e t_2, è tale che l'integrale di linea della Lagrangiana $L = T - V$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{1}$$

assuma un estremo in corrispondenza della traiettoria del moto.

Ciò vuol dire che, fra tutte le possibili traiettorie che il punto che rappresenta lo stato del sistema può percorrere, il sistema seguirà quella traiettoria in corrispondenza della quale l'integrale I assume un valore estremo (minimo o massimo). Possiamo anche dire che il moto del sistema sarà tale da rendere nulla la variazione dell'integrale I:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, ...q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_1, t)\,dt = 0 \tag{2}$$

Diamo ora un breve cenno di **calcolo delle variazioni**, risolvendo un problema che ci sarà utile per ricavare le Equazioni di Lagrange partendo dal Principio di Hamilton. Uno dei problemi del calcolo delle variazioni è quello di trovare una curva in corrispondenza della quale un dato integrale di linea assume un valore estremo. Cerchiamo, quindi, una curva $y = y(x)$, nell'intervallo compreso tra i valori x_1 ed x_2 tale che l'integrale di linea di una funzione $f = f(y, \dot{y}, t)$ abbia un estremo. Quindi, in corrispondenza dell funzione y, l'integrale:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, t)\ dx \tag{3}$$

deve assumere un valore estremo.
Consideriamo la funzione perturbata:

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x) \tag{4}$$

in cui la funzione η soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \eta(x_1) &= 0 \quad (5) \\ \eta(x_2) &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Scriviamo l'integrale come:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x)\; dx \tag{7}$$

la condizione di estremo assume la forma:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \tag{8}$$

Deriviamo sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right] dx \quad (9) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right] dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right] dx \quad (10) \end{aligned}$$

integriamo il secondo integrale per parti:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right] dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}\right] dx \quad (11) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx \quad (12) \end{aligned}$$

Il primo termine del secondo membro si annulla, quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right] dx \tag{13}$$

ovvero:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx \tag{14}$$

moltiplichiamo ambo i membri per $d\alpha$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha\, dx \tag{15}$$

valutiamo le derivate rispetto ad α per $\alpha = 0$ e scriviamo le seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \delta J \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \delta y \tag{17}$$

possiamo dunqhe scrivere la variazione dell'integrale J come:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \delta y \, dx = 0 \tag{18}$$

quindi la condizione di estremo per l'integrale J è data dalla relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \tag{19}$$

Esempio
Come esempio di applicazione, determiniamo la linea più breve che congiunge due punti in un piano.
La lunghezza dell'elemento d'arco è espressa come:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{20}$$

La lunghezza totale della curva congiungente i punti 1 e 2 è data da:

$$I = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{21}$$

Il problema si può ricondurre al cas generale esaminato in precedenza; in particolare, la funzione f risulta pari a :

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \tag{22}$$

calcoliamo le grandezze:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \tag{24}$$

Sostituendo nella condizione di estremo vista in precedenza, si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0 \tag{25}$$

ovvero:

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \tag{26}$$

con c costante. Possiamo dunque scrivere:

$$\dot{y} = c\sqrt{1 + \dot{y}^2} \tag{27}$$

$$\dot{y}^2 = c^2 \left(1 + \dot{y}^2\right) \tag{28}$$

$$\dot{y}^2 \left(1 - c^2\right) = c^2 \tag{29}$$

$$\dot{y}^2 = \frac{c^2}{(1 - c^2)} \tag{30}$$

$$\dot{y} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \tag{31}$$

indicando con a il termine costante:

$$a \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \tag{32}$$

l'equazione differenziale diventa:

$$\dot{y} = a \tag{33}$$

che ha come soluzione:

$$y = a\,x + b \tag{34}$$

essa rappresenta l'equazione di una **retta**.

Ricaviamo ora le Equazioni di Lagrange a partire dal Principio di Hamilton. Supponiamo che la funzione f di cui abbiamo discusso sia una funzione di più variabili indipendenti:

$$f = f(y_1(x), ..., y_n(x), \dot{y}_1(x), ..., \dot{y}_1(x), x) \tag{35}$$

allora la variazione dell'integrale J diventa:

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), ..., y_n(x), \dot{y}_1(x), ..., \dot{y}_1(x), x)\, dx \tag{36}$$

Procedendo come nel caso di una sola variabile, consideriamo J funzione di un parametro α:

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x) && (37) \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x) && (38) \\ y_3(x, \alpha) &= y_3(x, 0) + \alpha \eta_2(x) && (39) \\ \cdots &= \cdots && (40) \end{aligned}$$

esprimiamo la variazione di J come:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}\, d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right] dx \tag{41}$$

in analogia a quanto già ottenuto nel caso di una sola variabile, giungiamo alla conclusione:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)\right] \delta y_i \, dx = 0 \tag{42}$$

e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \tag{43}$$

Queste equazioni rappresentano le **Equazioni di Eulero-Lagrange**.

Con le seguenti posizioni:

$$x \rightarrow t \tag{44}$$

$$y_i \rightarrow q_i \tag{45}$$

$$f(y_i, \dot{y}_i, x) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{46}$$

le equazioni di Eulero-Lagrange diventano le **equazioni del moto di Lagrange**:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{47}$$

Riferimenti bibliografici

[1] H. Goldstein - *Classical Mechanics* - Addison Wesley.

[2] H. Goldstein - *Meccanica Classica* - Zanichelli.