Principio di D'Alembert ed equazioni di Lagrange

Nicola Rogano

Si definisce spostamento virtuale di un sistema ogni spostamento corrispondente ad una variazione infinitesima $\delta\mathbf{r}_i$ delle coordinate. Tale variazione deve essere compatibile con le forze ed i vincoli imposti al sistema all'istante dato. Se il sistema è in equilibrio, la forza totale agente su ciascuna particella deve essere nulla:

$$\mathbf{F}_i = 0 \tag{1}$$

In tali condizioni, risulta nullo anche il **lavoro virtuale** compiuto dalle forze:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2}$$

La forza totale che agisce sulla singola particella, ovvero $\mathbf{F}_i$, può essere decomposta nella componente relativa alle forze attive $\mathbf{F}_i^{(a)}$ e in quella relativa alle forze vincolari $\mathbf{f}_i$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i \tag{3}$$

per cui il lavoro virtuale diventa:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{4}$$

Se consideriamo sistemi per i quali è nullo il lavoro virtuale delle forze vincolari, otteniamo il **principio dei lavori virtuali**:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{5}$$

ovvero, *il lavoro virtuale delle forze attive è nullo per un sistema in equilibrio.* L'ultima relazione ricavata è valida solo nel caso statico; per generalizzare anche al caso dinamico, usiamo un artificio dovuto a Bernouilli e D'Alembert. Consideriamo le equazioni del moto:

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \tag{6}$$

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \tag{7}$$

il lavoro virtuale diventa:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{8}$$

ovvero:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{9}$$

considerando ancora una volta quei sistemi per cui il lavoro virtuale delle forze vincolari è nullo, otteniamo il **principio di D'Alembert**:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{10}$$

Se consideriamo come uniche forze che agiscono sulla singola particelle le forze attive $\mathbf{F}_i^{(a)}$, possiamo scrivere il principio di D'Alembert senza apici:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{11}$$

Ricordiamo che possiamo esprimere le coordinate $\mathbf{r}_i$ in funzione delle coordinate generalizzate q_i:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \tag{12}$$

l'espressione degli spostamenti virtuali $\delta\mathbf{r}_i$ diventa:

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{13}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro virtuale delle forze attive:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \tag{14}$$

in cui compaiono le **forze generalizzate** espresse come:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{15}$$

Prendiamo, ora, in considerazione il secondo termine che appare nell'equazione che rappresenta il proncipio di D'Alembert:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_i m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \tag{16}$$

Sostituendo l'espressione ricavata per $\delta\mathbf{r}_i$ si ottiene:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{17}$$

Possiamo scrivere la seguente relazione:

$$\sum_i m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \tag{18}$$

Consideriamo nuovamente le coordinate $\mathbf{r}_i$ in funzione delle coordinate generalizzate q_i:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \tag{19}$$

dalla relazione ricaviamo:

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{20}$$

quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right) \tag{21}$$

infine:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{22}$$

Ricaviamo, inoltre, la seguente espressione sempre dalla relazione della $\mathbf{v}_i$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{23}$$

Utilizzando le due ultime relazioni (e ricordando che $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ possiamo scrivere:

$$\sum_i m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}\right] \tag{24}$$

Scriviamo l'espressione dell'**energia cinetica** della particella:

$$T = \frac{1}{2}m_i\,v_i^2 \tag{25}$$

derivando rispetto a $\dot{q}_j$ otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = m_i\,\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{26}$$

derivando rispetto a q_j otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial q_j} = m_i\,\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \tag{27}$$

Utilizzando le due ultime relazioni, possiamo scrivere:

$$\sum_i m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_j \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i\,v_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i\,v_i^2\right)\right\} \tag{28}$$

ovvero:

$$\sum_i m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_j \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right\} \tag{29}$$

Moltiplicando per δq_j otteniamo proprio il secondo termine che compare nell'equazione del rpincipio di D'Alembert:

$$\sum_i m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \tag{30}$$

Utilizzando l'espressione già ottenuta per il primo termine in funzione delle forze generalizzate Q_j, ovvero:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j \tag{31}$$

possiamo riscrivere il principio di D'Alembert nel modo seguente:

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \tag{32}$$

che conduce alle **Equazioni di Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{33}$$

Nel caso di forze conservative:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V \tag{34}$$

In tal caso, le forze generalizzate diventano:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_j \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{35}$$

ovvero:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{36}$$

riscriviamo le Equazioni di Lagrange come:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \tag{37}$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0 \tag{38}$$

poichè la funzione potenziale V è indipendente dalle velocità generalizzate $\dot{q}_j$, possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0 \tag{39}$$

definiamo una nuova funzione, la **Lagrangiana**, come:

$$L = T - V \tag{40}$$

Le **Equazioni di Lagrange** assumono allora la forma definitiva:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{41}$$

Riferimenti bibliografici

[1] H. Goldstein - *Classical Mechanics* - Addison Wesley.

[2] H. Goldstein - *Meccanica Classica* - Zanichelli.