# Lagrangiana di una particella carica in un campo elettromagnetico

Nicola Rogano

Equazioni di Maxwell in unità di Gauss:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && (1)\\
\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} && (2)\\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho && (3)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (4)
\end{aligned}$$

Forza di Lorentz che agisce su una particella:

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \tag{5}$$

Ricordando che:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{6}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (7)\\
\mathbf{B} &= (\nabla \times \mathbf{A}) && (8)
\end{aligned}$$

con $\mathbf{A}$ che viene indicato come *potenziale vettore*. Sostituendo:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{9}$$

Quindi:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{10}$$

Ricordando che:

$$\nabla \times (\nabla\,\phi) = 0 \tag{11}$$

si ha:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\,\phi \tag{12}$$

con $\phi$ che viene indicato come *potenziale scalare*.

In conclusione, esprimiamo le grandezze **B** ed **E** in funzione del potenziale vettore e del potenziale scalare, rispettivamente:

$$\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{13}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{14}$$

Sostituendo nella forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\left[-\nabla \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})\right] \tag{15}$$

Esaminiamo solo le componenti lungo $x$:

$$(\nabla \phi)_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{16}$$

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{17}$$

$$= v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{18}$$

Aggiungendo e sottraendo al secondo membro la medesima quantità:

$$v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} \tag{19}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x &= v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} \\ &= v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Ricordiamo che la derivata totale di $A_x$ è:

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \tag{20}$$

da cui:

$$\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = \frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{21}$$

Inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \tag{22}$$

$$= \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \tag{23}$$

$$= v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{24}$$

Sostituendo:

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{25}$$

La componente lungo $x$ della forza di Lorentz diventa:

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right]\right\} \tag{26}$$

Semplificando:

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}\right\} \tag{27}$$

Ricordiamo che:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A_x\, v_x + A_y\, v_y + A_z\, v_z \tag{28}$$

quindi possiamo scrivere:

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \tag{29}$$

Riscriviamo l'espressione per $F_x$:

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\right]\right\} \tag{30}$$

Consideriamo una funzione $U$ che definiamo come **potenziale generalizzato**:

$$U = q\phi - \frac{q}{c}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \tag{31}$$

Dimostriamo che la forza di Lorentz può essere ottenuta con la seguente relazione:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_x} \tag{32}$$

Si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = q\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \tag{33}$$

ovvero:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = q\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi - \frac{1}{c}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\right] \tag{34}$$

Inoltre:

$$\frac{\partial U}{\partial v_x} = -\frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \tag{35}$$

sostituendo:

$$F_x = -q\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi - \frac{1}{c}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\right] - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \tag{36}$$

otteniamo:

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi - \frac{1}{c}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\right]\right\} \tag{37}$$

L'ultima equazione è proprio l'espressione della componente lungo $x$ della forza di Lorentz. Analogo ragionamento può essere fatto per le componenti lungo $y$ e lungo $z$. In definitiva, avviamo dimostrato come la forza di Lorentz può essere ottenuta mediante un potenziale generalizzato $U$.

**La Lagrangiana per una particella carica in moto in un campo elettromagnetico assume la seguente espressione:**

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \tag{38}$$

## Riferimenti bibliografici


[1] H. Goldstein - *Classical Mechanics* - Addison Wesley.

[2] H. Goldstein - *Meccanica Classica* - Zanichelli.