Equazioni del moto di Hamilton

Nicola Rogano

La formulazione lagrangiana si può considerare come una descrizione della meccanica in termini di *coordinate generalizzate* e di *velocità generalizzate*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{1}$$

Cerchiamo una nuova formulazione della meccanica in termini di *cooordinate generalizzate* e di *momenti generalizzati*.
Momenti generalizzati

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2}$$

dove L è sempre la funzione Lagrangiana:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{3}$$

Per passare al nuovo insieme di coordinate usiamo la **trasformazione di Legendre**. A titolo di esempio, consideriamo una funzione di due variabili $f = f(x, y)$ e scriviamo il differenziale:

$$df = u\,dx + v\,dy \tag{4}$$

avendo indicato:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{5}$$

consideriamo una nuova funzione $g = g(u, y)$ tale che:

$$g = f - u\,x \tag{6}$$

e scriviamo il differenziale:

$$dg = df - x\,du - u\,dx \tag{7}$$

tenendo conto delle relazioni precedenti, otteniamo:

$$dg = v\,dy - x\,du \tag{8}$$

con la relazione:

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad v = \frac{\partial g}{\partial y} \tag{9}$$

Definiamo ora la **funzione Hamiltoniana** come:

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \tag{10}$$

il differenziale di una funzione $H = H(p, q, t)$ sarà:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{11}$$

sfruttando la definizione di Hamiltoniana, ne calcoliamo il differenziale:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{12}$$

ricordando la definizione di momento generalizzato:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{13}$$

le equazioni di Lagrange diventano:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{14}$$

sostituendo nell'espressione del differenziale dell'Hamiltoniana otteniamo:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{15}$$

ovvero:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{16}$$

Confrontando con il risultato ottenuto per il differenziale di $H = H(p, q, t)$

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{17}$$

possiamo scrivere il seguente insieme di equazioni:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{18}$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{19}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{20}$$

Le prime due equazioni rappresentano le **equazioni canoniche di Hamilton** e sostituiscono le *equazioni di Lagrange*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{21}$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{22}$$

Conclusioni
Per risolvere un problema di meccanica utilizzando la formulazione Hamiltoniana occorre seguire i seguenti passaggi:

- scrivere la Lagrangiana del sistema

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{23}$$

- ricavare i momenti canonici

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{24}$$

- costruire l'Hamiltoniana

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \tag{25}$$

- scrivere le equazioni del moto (equazioni differenziali del primo ordine)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{26}$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{27}$$

Riferimenti bibliografici

[1] H. Goldstein - *Classical Mechanics* - Addison Wesley.

[2] H. Goldstein - *Meccanica Classica* - Zanichelli.